令和５年　大学入試共通テスト（数学 II・数学 B）の略解と解説

一昨日　冗　著

注意：　答えは，赤文字 or 赤数字などで示す。

第 1 問．［1］ 三角関数の値の大小関係についての問題。

解答）(1) $x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $\sin x < \sin 2x$ であり， $x = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき $\sin x > \sin 2x$ である。（下の図 1-1 参照）

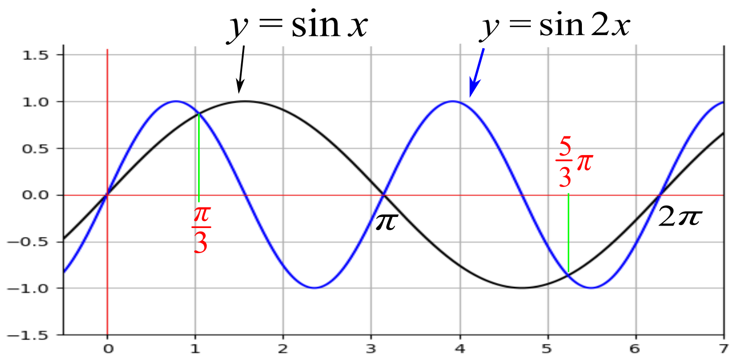


図1-1

(2) $\sin x$ と $\sin 2x$ の値の大小関係を詳しく調べよう。

$$\sin 2x - \sin x = 2\sin x\cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1)$$

であるから，$\sin 2x - \sin x > 0$ が成り立つことは，

「$\sin x > 0$ かつ $2\cos x - 1 > 0$」 $\cdots$ ①,

または 「$\sin x < 0$ かつ $2\cos x - 1 < 0$」 $\cdots$ ②

が成り立つことと同値である。$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，①が成り立つような x の値の範囲は

$$0 < x < \frac{\pi}{3}$$

であり，②が成り立つような x の値の範囲は

$$\pi < x < \frac{5}{3}\pi$$

である（図 1-1 参照。また，$\cos x = \dfrac{1}{2}$ となるのは，$x = \dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{5}{3}\pi$ のとき，を利用せよ）。

よって，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，$\sin 2x > \sin x$ が成り立つような x の値の範囲は

$$0 < x < \frac{\pi}{3}, \qquad \pi < x < \frac{5}{3}\pi$$

である。

(3) $\sin 3x$ と $\sin 4x$ の値の大小関係を詳しく調べよう。

三角関数の加法定理を用いると，等式

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots \text{③}$$

が得られる。$\alpha + \beta = 4x$, $\alpha - \beta = 3x$ とおくと，

$$\alpha = \frac{7}{2}x, \quad \beta = \frac{x}{2}$$

だから，③より，$\sin 4x - \sin 3x > 0$　が成り立つことは

$$「\cos\frac{7}{2}x > 0 \quad かつ \quad \sin\frac{x}{2} > 0 」 \quad \cdots ④$$

または　$$「\cos\frac{7}{2}x < 0 \quad かつ \quad \sin\frac{x}{2} < 0 」 \quad \cdots ⑤$$

が成り立つことと同値であることがわかる。$0 \leqq x \leqq \pi$　のとき，$\sin 4x > \sin 3x$　が成り立つような x の値の範囲は，

$$\sin\frac{x}{2} \geqq 0 \quad だから，④より \quad \cos\frac{7}{2}x = 0 \quad を満たす \quad x = \frac{\pi}{7},\ \frac{3}{7}\pi,\ \frac{5}{7}\pi$$

を考慮すると，

$$0 < x < \frac{\pi}{7}, \quad \frac{3}{7}\pi < x < \frac{5}{7}\pi$$

である（下図，左のグラフ参照せよ）。

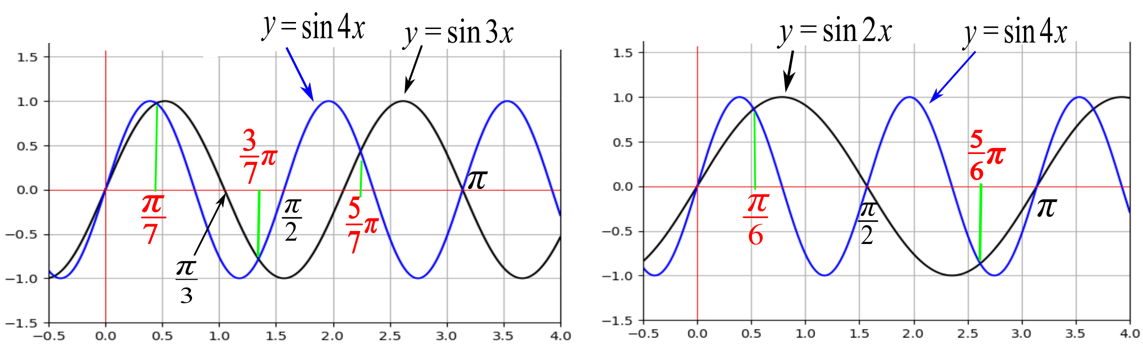


図1-2

(4)　$0 \leqq x \leqq \pi$　のとき，$\sin 3x > \sin 4x > \sin 2x$　が成り立つような x の値の範囲を求める。図 1-2 より，

$$\sin 3x > \sin 4x \quad を満たす\ x\ の範囲は \quad \frac{\pi}{7} < x < \frac{3}{7}\pi, \quad \frac{5}{7}\pi < x < \pi \quad \cdots ⑥$$

$$\sin 4x > \sin 2x \quad を満たす\ x\ の範囲は \quad 0 < x < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi \quad \cdots ⑦$$

だから，⑥,⑦より，答えは

$$\frac{\pi}{7} < x < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5}{7}\pi < x < \frac{5}{6}\pi$$

であることがわかる。

解説）[1] 三角関数に関する普通の問題ですね。文章を読みながら穴を埋めていく，まあ，易しい問題です。最初の問としてはいい問題でしょう。(1) はレベル 4，(2) はレベル 3，(3),(4) はレベル 2.5 ですね。

第 1 問.　［2］ 指数・対数の関係を問う問題。

解答）(1)　$a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$　のとき，$\log_a b = x$　とおくと，$a^x = b$　が成り立つ。

(2) 様々な対数の値が有理数か無理数かについて考えよう。

(i) $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$，$\log_9 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 9} = \dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \dfrac{3}{2}$　であり，どちらも有理数である。

(ii)　$\log_2 3$　が有理数と無理数のどちらであるかを考えよう。

$\log_2 3$　が有理数であると仮定すると，$\log_2 3 > 0$　であるので，二つの自然数　$p,\ q$　を用いて

$\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$ と表すことができる。このとき，(1) により $\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$ は $2^p = 3^q$ と変形できる。いま，2 は偶数であり 3 は奇数であるので，$2^p = 3^q$ を満たす自然数 p, q は存在しない。
したがって，$\log_2 3$ は無理数であることがわかる。

(iii) a, b を 2 以上の自然数とするとき，(ii) と同様に考えると，

$$\log_a b = \frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad a^{\frac{p}{q}} = b \quad \Leftrightarrow \quad a^p = b^q \qquad \text{だから，}$$

「a と b のいずれか一方が偶数で，もう一方が奇数ならば，$\log_a b$ はつねに無理数である」ことがわかる。

解説）実につまらない問題だね。これ数学の問題？って感じのものだね。何も考えることなく答えが選べますね。みんなに点数をあげる問題ということで納得しましょう。(1) はレベル４，(2) はレベル 3 ですね。

第２問. ［１］ 3 次関数についての問題です。

解答）(1) k を正の定数とし，次の 3 次関数を考える。

$$f(x) = x^2(k - x)$$

$y = f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の座標は $(0,\ 0)$ と $(k,\ 0)$ である。
$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = -3x^2 + 2kx = -x(3x - 2k)$$

である。
$x = 0$ のとき，$f(x)$ は極小値 0 をとる。
$x = \dfrac{2}{3}k$ のとき，$f(x)$ は極大値 $\dfrac{4}{27}k^3$ をとる。
また，$0 < x < k$ の範囲において $x = \dfrac{2}{3}k$ のとき $f(x)$ は最大となることがわかる。
(2) 図 2-1 の左図のように，底面が半径 9 の円で，高さが 15 の円錐に内接する円柱を考える。円柱の底面の半径と体積をそれぞれ x, V とする。V を x の式で表したい。

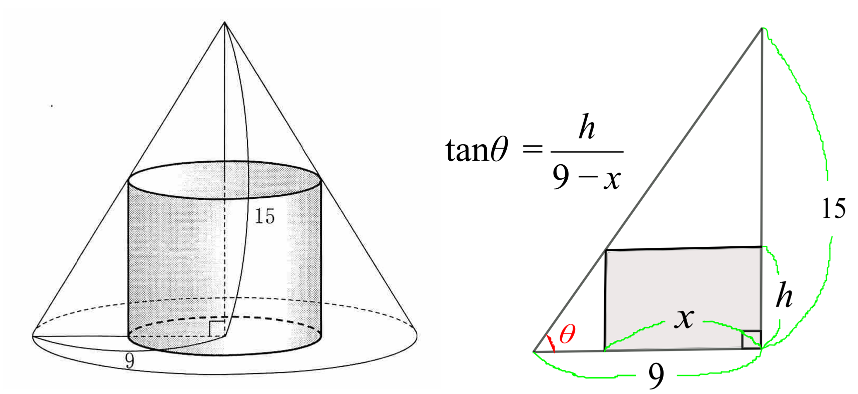


図2-1

上図右のものは，円錐を真っ二つに切ったものの切り口（半分だよ）の図です。図のように $\tan\theta$ の値がわかるので，円柱の高さ h は

$$\frac{h}{9-x} = \frac{15}{9} \quad \text{より} \quad h = \frac{5}{3}(9 - x) \quad \text{だから}$$

$$V = \frac{5}{3}\pi x^2(9 - x) \quad (\ 0 < x < 9\ )$$

である。(1) の考察より，$x=6$ のとき，V は最大となることがわかる。V の最大値は

$V=\dfrac{5}{3}\pi\cdot 36(9-6)=180\pi$　である。

解説）3 次関数のごく普通の問題ですね。教科書の例題程度（中の上くらいの難しさ）の問題なので，受験生の 70 %位は満点だったでしょう。(1) はレベル 3.5，(2) はレベル 2.5 という所でしょうか。

第 2 問.　［2］ 積分を使った応用問題ですね。

解答）(1) 定積分の計算の問題：

$$\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x\ +\ 3\right)dx=\left[\frac{1}{10}x^2+3x\right]_0^{30}=\frac{1}{10}\cdot 30^2+90=180.$$

　また，次の 2 次関数の不定積分は

$$\int\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx=\frac{1}{300}x^2-\frac{1}{12}x^2+5x+C$$

である。ただし，C は積分定数とする。

(2) ある地域の 3 月の「ソメイヨシノ（桜の種類) の開花予想日」についての問題。
・予想の 1 つの方法；2 月に入ってからの気温を時間の関数とみて，その積分の値を基準にする。
図 1 の 6 時間ごとの気温の折れ線グラフをもとにして考える。

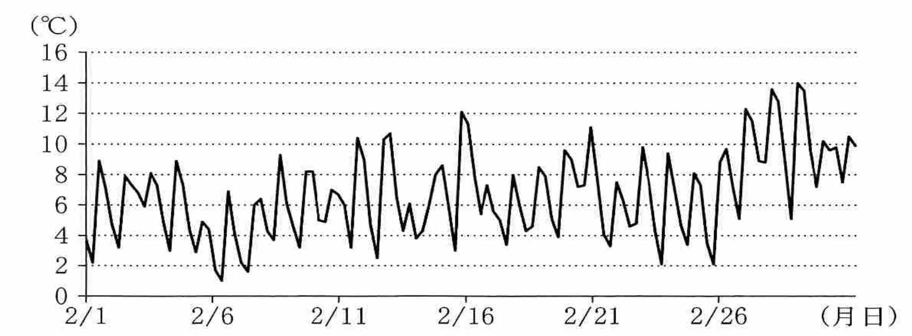


図 1　6 時間ごとの気温の折れ線グラフ

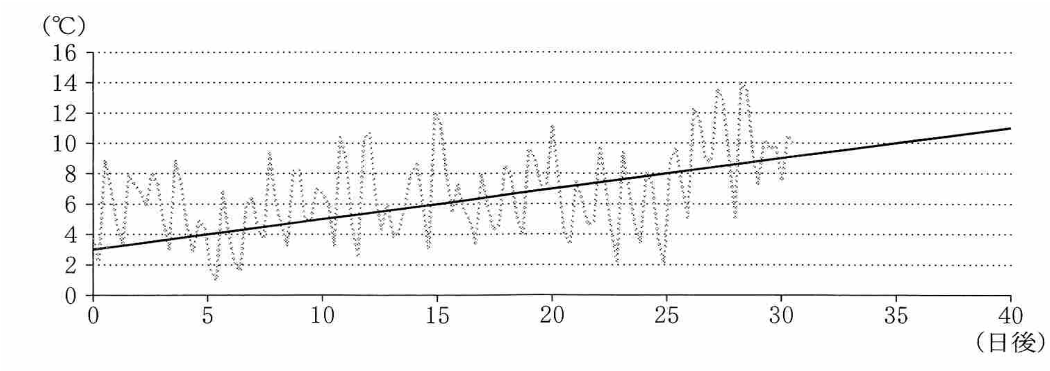


図 2　図 1 のグラフと，太郎さんが直線とみなした $y=f(x)$ のグラフ

図2-2

グラフの横軸を x 日後とする。2 月 1 日 0 時を起点とする（$x=0$ の時点）。例えば，10.3 日後（$x=10.3$）は，2 月 11 日午前 7 時 12 分を表す。x 日後の気温を y°C とする。このとき，y は x の関数であり，これを $y=f(x)$ とおく。ただし，y は負にならないものとする。

太郎さんと花子さんは，関数 $f(x)$ を用いてソメイヨシノの開花日時を次の設定で考えることにした。

<設定>

正の実数 t に対して，$f(x)$ を 0 から t まで積分した値を $S(t)$ とする。すなわち，

$$S(t) = \int_0^t f(x)\,dx$$

とする。この $S(t)$ が 400 に到達したとき，ソメイソシノが開花する。

設定のもと，太郎さんは気温を表す関数 $y = f(x)$ のグラフを上図，図 2 のように直線とみなしてソメイヨシノの開花日時を考えることにした。

解答）(i) 太郎さんは　$f(x) = \frac{1}{5}x + 3 \quad (\ x \geqq 0\ )$　として考えた。このとき，ソメイヨシノの開花日時は 2 月に入ってから 50 日後となる。なぜならば，

$$\int_0^t \left(\frac{1}{5}x + 3\right) dx = \left[\frac{1}{10}x^2 + 3x\right]_0^t = \frac{1}{10}t^2 + 3t = 400 \quad \text{より}$$

$$t^2 + 30t - 4000 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t+80)(t-50) = 0 \qquad \therefore \quad t = 50.$$

(ii) 太郎さんと花子さんは，2 月に入ってから 30 日後以降の気温について話をしている。

太郎：1 次関数を用いてソメイヨシノの開花日時を求めて見たよ。

花子：気温の上がり方から考えて，2 月に入ってから 30 日後以降の気温を表す関数が
2 次関数の場合も考えてみようか。

花子さんは気温を表す関数 $f(x)$ を，$0 \leqq x \leqq 30$ のときは太郎さんと同じように

$$f(x) = \frac{1}{5}x + 3 \qquad \cdots \quad ①$$

とし，$x \geqq 30$ のときは

$$f(x) = \frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{6}x + 5 \qquad \cdots \quad ②$$

として考えた。なお，$x = 30$ のとき①の右辺の値と②の右辺の値は一致する。花子さんの考えた式を用いて，ソメイヨシノの開花日時を考えよう。

解答）(1) より，$\int_0^{30} \left(\frac{1}{5}x + 3\right) dx = 180$ であり $\int_{30}^{40} \left(\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{6}x + 5\right) dx = 115$

となることがわかる。

また，$x \geqq 30$ の範囲において $f(x)$ は増加する。よって

$$\int_{30}^{40} f(x)\,dx < \int_{40}^{50} f(x)\,dx$$

であることがわかる。以上より，ソメイヨシノの開花日時は 2 月に入ってから 40 日後より後，かつ 50 日後より前となる。なぜならば，40 日後までの定積分の値は 295 で，50 日後までの定積分の値は　295+115=410　より大きいからである。

解説）問題文はえらく長くて，難しそうだが，読者が考えるような所はほとんどない。また，面白い計算もない。出題者がほとんど解答の道筋と答えを与えているような問題なので，つまらない。(1) はレベル 4，(2) の (i) はレベル 3，(ii) はレベル 2.5 ですね。

第３問. 正規分布，二項分布，二項分布の正規近似に関する問題です。

(1) ある生産地で生産されるピーマン全体を母集団とし，この母集団におけるピーマン 1 個の重さ（単位は g）を表す確率変数を X とする。m と σ を正の実数とし，X は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとする。

解答）(i) この母集団から 1 個のピーマンを無作為に抽出したとき，重さが mg 以上である確率 $P(X \geqq m)$ は

$$P(X \geqq m) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geqq 0\right) = \frac{1}{2}$$

である。（これは誰もが知っている事実，できて当たり前）

(ii) 母集団から無作為に抽出された大きさ n の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の標本平均を $\bar{X}$ とする。$\bar{X}$ の平均（期待値）と標準偏差はそれぞれ

$$E(\bar{X}) = m, \qquad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

となる。（これも誰もが知っていなければならない結果）

$n = 400$，標本平均が 30.0g，標本の標準偏差が 3.6g のとき，m の信頼度 90 %の信頼区間を次の**方針**で求めよう。

−−−−−−−−−−−<**方針**>−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

Z を標準正規分布 $N(0, 1^2)$ に従う確率変数として，$P(-z_0 \leqq Z \leqq z_0) = 0.901$ となる z_0 を正規分布表から求める。この z_0 を用いると m の信頼度 90.1 %の信頼区間が求められるが，これを信頼度 90 %の信頼区間とみなして考える。

−−

方針において $z_0 = 1.65$ である（表から読み取れる）。

一般に標本の大きさ n が大きいときには，母標準偏差の代わりに，標本の標準偏差を用いてよいことが知られている。$n = 400$ は十分に大きいので，**方針**に基づくと，m の 90 %信頼区間は

$$29.703 = 30 - 1.65 \times \frac{3.6}{\sqrt{400}} \leqq m \leqq 30 + 1.65 \times \frac{3.6}{\sqrt{400}} = 30 + 1.65 \times 0.18 = 30.297$$

と計算できるので，$29.7 \leqq m \leqq 30.3$ となる。

(2) (1) の確率変数 X において，$m = 30.0$, $\sigma = 3.6$ とした母集団から無作為にピーマンを 1 個ずつ抽出し，ピーマン 2 個を 1 組にしたものを袋に入れていく。このようにしてピーマン 2 個を 1 組にしたものを 25 袋作る。その際，1 袋ずつの重さの分散を小さくするために，次の**ピーマン分類法**を考える。

−−−−−−<**ピーマン分類法**>−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

無作為に抽出したいくつかのピーマンについて，重さが 30.0g 以下のときを S サイズ，30.0g を超えるときは L サイズと分類する。そして，分類されたピーマンから S サイズと L サイズのピーマンを一つずつ選び，ピーマン 2 個を 1 組とした袋を作る。

−−−

解答）(i) ピーマンを無作為に 50 個抽出したとき，**ピーマン分類法**で 25 袋作ることができる確率 p_0 を考えよう無作為に 1 個抽出したピーマンが S サイズである確率は $\frac{1}{2}$ である。

ピーマンを無作為に 50 個抽出したときの S サイズのピーマンの個数を表す確率変数を U_0 とすると，U_0 は二項分布 $B\left(50, \frac{1}{2}\right)$ に従うので

$$p_0 = {}_{50}C_{25} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{25} \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^{50-25}$$

となる。p_0 を計算すると，$p_0 = 0.1122\cdots$ となることから，ピーマンを無作為に 50 個抽出したとき，25 袋作ることができる確率は 0.11 程度とわかる。

(ii) **ピーマン分類法**で 25 袋作ることができる確率が 0.95 以上となるようなピーマンの個数を考えよう。

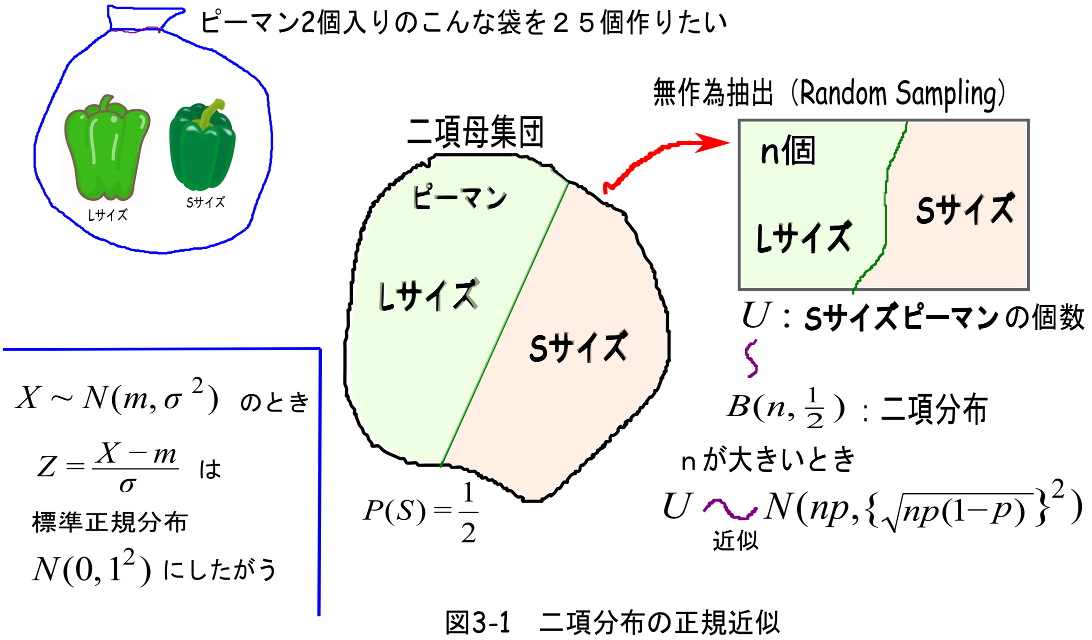


図3-1　二項分布の正規近似

解答）k を自然数とし，ピーマンを無作為に $(50+k)$ 個抽出したとき，S サイズのピーマンの個数を表す確率変数を U_k とすると，U_k は二項分布 $B\left(50+k,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う。（上図 3-1. を参照せよ。以下同様）

$(50+k)$ は十分に大きいので，U_k は近似的に正規分布 $N\left(\dfrac{50+k}{2},\ \dfrac{50+k}{4}\right)$ に従い，

$Y = \dfrac{U_k - \frac{50+k}{2}}{\sqrt{\frac{50+k}{4}}}$ とすると，Y は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1^2)$ に従う。

よって，**ピーマン分類法**で，25 袋作ることができる確率を p_k とすると

$$p_k = P(\ 25 \leqq\ U_k\ \leqq 25+k\ ) = P\left(-\frac{k}{\sqrt{50+k}} \leqq Y \leqq \frac{k}{\sqrt{50+k}}\right)$$

となる。$k = \alpha,\ \sqrt{50+k} = \beta$ とおく。$p_k \geqq 0.95$ になるような $\dfrac{\alpha}{\beta}$ について，正規分布表から

$\dfrac{\alpha}{\beta} \geqq 1.96 \quad \cdots \quad (\sharp)$ を満たせばよいことがわかる。ここでは

$$\frac{\alpha}{\beta} \geqq 2 \qquad \cdots \quad ①$$

を満たす自然数 k を考えることとする。（①を満たす最小の k は，$(\sharp)$ を満たす最小の k よりも大きいことに注意せよ） ①の両辺は正であるから，$\alpha^2 \geqq 4\beta^2$ を満たす最少の k を k_0 とすると，

$$k^2 \geqq 4(50+k) \quad \Leftrightarrow \quad k^2 - 4k \geqq 200 \quad \Leftrightarrow \quad (k-2)^2 \geqq 204 \quad \therefore k-2 \geqq 14.\cdots$$

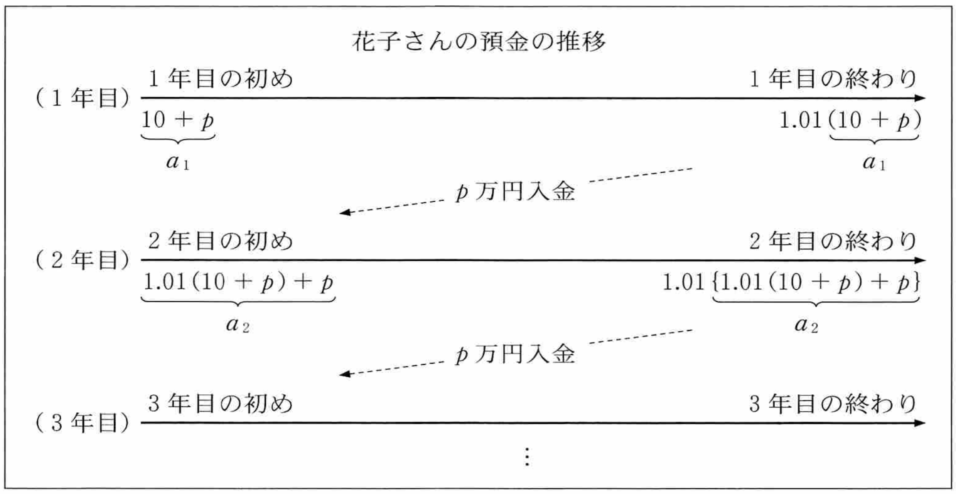
となるので $k_0 = 17$ であることがわかる。ただし，この計算においては，$\sqrt{51} = 7.14$ を用いてもよい（上の計算はこの値を使っていない）。 したがって，少なくとも 67 個のピーマンを抽出しておけば，**ピーマン分類法**で 25 袋作ることができる確率は 0.95 以上となる。

解説）統計学の基本となる概念がわかっているか否かを問う，よく考えられたいい問題なのだが，出題者が解答の過程を与えすぎているので，受験者はあまり考えなくてもいい問題になっている。問題作る方も難しいね。(1) の (i) はレベル 4，(ii) はレベル 2.5，(2) の (i) はレベル 3.5，(ii) は教科書ではあまり見かけない問題なので，戸惑った受験生も多かっただろうと思う。レベル 1 にしたいところだが，ヒントが多すぎるのでレベル 1.5 だね。

第４問． 花子さんは，毎年の初めに預金口座に一定額の入金をすることにした。この入金を始める前における花子さんの預金は 10 万円である。ここで，預金とは預金口座にあるお金の額のことである。預金には年利 1 ％で利息がつき，ある年の初めの預金が x 万円であれば，その年の終りには預金は $1.01x$ 万円となる。次の年の初めには $1.01x$ 万円に入金額を加えたものが預金となる。

毎年の初めの入金額を p 万円とし，n 年目の初めの預金を a_n 万円とおく。ただし，$p > 0$ とし，n は自然数とする。

例えば，$a_1 = 10 + p$，$a_2 = 1.01(10 + p) + p$ である。



参考図

図4-1

(1) a_n を求めるために二つの方針で考える。

－－－－－－－＜方針１＞－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

n 年目の初めの預金と $(n + 1)$ 年目の初めの預金との関係に注目して考える。

－－

解答）3 年目の初めの預金 a_3 万円について，$a_3 = 1.01\{1.01(10 + p) + p\} + p$ である。すべての自然数 n について

$$a_{n+1} = 1.01a_n + p$$

が成り立つ。これは

$$a_{n+1} + 100p = 1.01(a_n + 100p)$$

と変形でき，a_n を求めることができる。

－－－－－－－＜方針２＞－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

もともと預金口座にあった 10 万円と毎年の初めに入金した p 万円について，n 年目の初めにそれぞれがいくらになるかに着目して考える。

－－－

もともと預金口座にあった 10 万円は，2 年目の初めには 10×1.01 万円になり，3 年目の初め

には 10×1.01^2 万円になる。同様に考えると n 年目の初めには $10\times1.01^{n-1}$ 万円になる。

・1 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには $p\times1.01^{n-1}$ 万円になる。
・2 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには $p\times1.01^{n-2}$ 万円になる。
・n 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには p 万円のままである。

これより

$$\begin{aligned} a_n &= 10\times1.01^{n-1}+p\times1.01^{n-1}+p\times1.01^{n-2}+\ \cdots\ +p \\ &= 10\times1.01^{n-1}+p\sum_{k=1}^{n}1.01^{k-1} \end{aligned}$$

となることがわかる・ここで，

$$\sum_{k=1}^{n}1.01^{k-1}=\frac{1.01^n-1}{1.01-1}=\frac{1.01^n-1}{0.01}=100(1.01^n-1)$$

となるので，a_n を求めることができる。

(2) 花子さんは，10 年目の終りの預金が 30 万円以上になるための入金額について考えた。

解答）10 年目の終りの預金が 30 万円以上であることを不等式を用いて表すと $1.01a_{10}\geqq30$ となる。この不等式を p について解くと

$$1.01\left(10\times1.01^9+p\times100(1.01^{10}-1)\right)\geqq30 \quad\Leftrightarrow\quad p\times100(1.01^{10}-1)\geqq\frac{30-10\times1.01^{10}}{1.01},$$

$$\therefore\quad p\ \geqq\ \frac{30-10\times1.01^{10}}{101(1.01^{10}-1)}\quad\cdots\quad ①$$

となる。したがって，毎年の初めの入金額が例えば 18000 円であれば（上の①の右辺の値は 1.79 万円），10 年目の終りの預金が 30 万円になることがわかる。

(3) 1 年目の入金を始める前における花子さんの預金が 10 万円ではなく，13 万円の場合を考える。すべての自然数 n に対して，この場合の n 年目の初めの預金は a_n 万円よりも $3\times1.01^{n-1}$ 万円多い。なお，年利は 1 %であり，毎年の初めの入金額は p 万円のままである。答えの計算は次のようにすればよい。

この場合の n 年目の初めの預金を b_n として，

$$\begin{aligned} b_n &= 13\times1.01^{n-1}+p\times100(1.01^n-1) \\ a_n &= 10\times1.01^{n-1}+p\times100(1.01^n-1) \end{aligned}$$

だから，引き算をすればよい。

解説）数列および漸化式に関しての普通の問題ですね。問題文にしたがって思考していけば，難しくはない問題です。(1) は $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{オ}}$ がレベル 3，$\boxed{\text{カ}}$ から $\boxed{\text{ケ}}$ がレベル 2.5，(2) はちょっと計算があるので，レベル 1.5 ですね。(3) はなぜこんな問題を最後に持ってきたのかわからないですね。問題のストーリーから考えて，馬鹿々々しい問題です（かつ，易しすぎる）。別の問題を持ってきた方がよかったね。レベル 3 ですね。

第 5 問. 三角錐 PABC において，辺 BC の中点を M とおく。また，$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{PAC}$ とし，この角度を θ とおく。ただし，$0^\circ<\theta<90^\circ$ とする。（図 5-1,(1) 参照）

解答）(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表せる。また

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\cos\theta\quad\cdots\quad ①$$

である（内積の公式から明らか）。

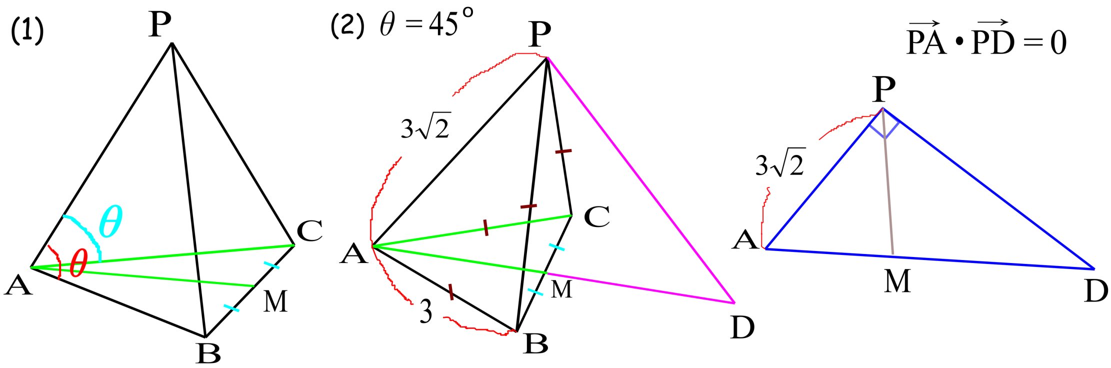


図5-1　三角錐

(2) $\theta = 45^\circ$ とし，さらに　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = 3\sqrt{2}$,　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = 3$,　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PC}}| = 3$　が成り立つ場合を考える（上図 (2) 参照)。このとき，式①より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3\sqrt{2}\cdot 3\cdot\cos 45^\circ = 9 \quad \cdots \quad ②$$

である。さらに，直線 AM 上の点 D が ∠APD= 90° を満たしているとする。このとき

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$　である。なぜならば

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \qquad （ここで，②の結果を使う）$$

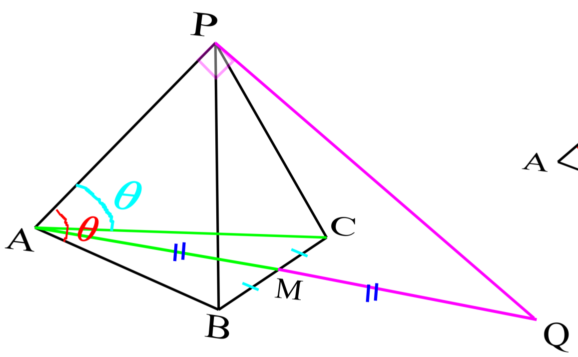
$$= \frac{1}{2}(9+9) = 9 \quad \cdots \quad ③$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}}$　とおく。　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}} = 0$　を変形すると

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}} + k\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (3\sqrt{2})^2 - k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$$

③より，$18 - 9k = 0$　を得るので，$k = 2$　である。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$　で定まる点を Q とおく。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直である三角錐 PABC はどのようなものかについて考えよう。例えば (2) の場合では点 Q は点 D と一致し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$　は垂直である。



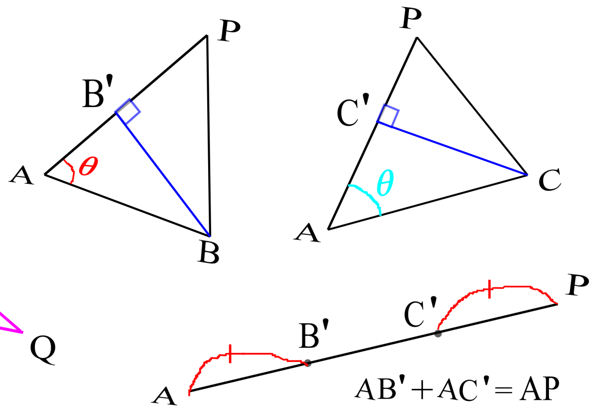


図5-2　(3)の三角錐

解答）(i) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$　を用いて表して考えると，

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$　より，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}) = 0.$　また，　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$　（ABQC は平行四辺形）

だから　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = 0 \quad \therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = 0$

以上より，　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} \quad \cdots \quad ④$　が成り立つ。

さらに①に注意すると，④から

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| \quad \cdots ⑤$$

が成り立つことがわかる。

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であれば，⑤が成り立つ。逆に⑤が成り立てば，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は垂直である。（最後のこの一文は親切だね。これのチェックは，普通忘れるよね。）

(ii) k を正の実数とし　$k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　が成り立つとする。このとき，

$k|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta$　より　$k|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$　$\cdots$ ⑥　が成り立つ。

また，点 B から直線 AP に下した垂線と直線 AP との交点を B’ とし，同様に点 C から直線 AP に下した垂線と直線 AP との交点を C’ とする。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直なので，⑤より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| \quad\Leftrightarrow\quad |\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|+|\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|.$$

また，⑥より　$k|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|$　だから　$|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|:|\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|=1:k$　なので，点 A, B$'$, C$'$, P の位置関係は，図 5-2. の右下の図のようになる。すなわち，

$$\mathrm{AB'} : \mathrm{AC'} : \mathrm{C'P}=1:k:1$$

だから，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であることは，B$'$ と C$'$ が線分 AP をそれぞれ $1:k$ と $k:1$ に内分する点であることと同値である。

特に，$k=1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であることは，点 B$'$，C$'$ が共に線分 AP の中点だから，△PAB と △PAC がそれぞれ BP=BA, CP=CA を満たす二等辺三角形であることと同値である。

解説）空間図形の問題は，想像力が大切ですね。ときどき錯覚を起こすかもしれないので，注意しなければなりませんね。この問題はちょっと難しかったね。(1),(2) の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{オ}}$ はレベル 3.5，$\boxed{\text{カ}}$ はレベル 3，$\boxed{\text{キ}}$ はレベル 1 ですね。(3) の (i) はレベル 1.5，(ii) の $\boxed{\text{コ}}$ はレベル 2.5，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ はレベル 1 でしょう。(3) は，問題自体が捉えにくかったね（何を求めたいのかよく分からない）。また，答えの選択肢に長くて複雑なものがあったので，戸惑ったでしょう。全体としては，まあまあいい問題だったかな。

［総評］今年の問題は去年に比べてだいぶ易しかったですね。私は，共通テストはこの位の難易度でいいと思いますよ。

しかし，問題文が長すぎるよね。受験者に考えさせようとして，いろいろ説明文を付けているのだが，煩わしいね。そしてこのことがかえって問題を易しくしてしまっているよね。簡潔な文章で ” これこそ数学の問題だ ” というようなのがないよね。こういうテストでは作るのが難しいかもしれませんが，簡潔でわかりやすく，面白くそしてストーリーのある問題を期待しますね。

選択問題では，第 5 問がとびぬけて難しいように感じました。これを選んだ学生は得点がのびなかったかもね。選択問題の難易度は，まあまあ同じくらいになるようにして欲しいね。問題の難易度にレベルを付けてきたので，これらの得点を表にしてみました。

表１．　難易度別の配点

レベル	第 1 問 三角関数 指数・対数 II	第 2 問 3 次関数, 極値 積分 II	第 3 問 正規分布, 二項分布 正規近似 B	第 4 問 数列, 漸化式 数列の和 B	第 5 問 空間内のベクトル 内積 B
4〜3.5	5	13	5		4
3	15	3		10	2
2.5	10	14	8	6	2
2					
1.5			7	4	5
1					7
合計	30	30	20	20	20

選択の問題で,（第 3 問と第 4 問）または（第 3 問と第 5 問）を選んだ時の得点の合計は，難易度のレベルで考えると次のようになります。

	＜第 3 問，第 4 問を選択＞	＜第 3 問，第 5 問を選択＞
レベル 3 までできると	51 点	47 点
レベル 2.5 〃	89 点	81 点
レベル 1.5 〃	100 点	93 点

（第 3 問と第 4 問）を選んだ学生の方が点を取りやすかったように思います。

レベル 2 の問題（教科書の中にある 1 番難しい例題や問題のレベル）がなかったので，全体としては易しい問題でした。平均点は 61.48 点だったので上の表から考えられることは，平均点程度をとった学生は，レベル 3 まではほとんど正解し，レベル 2.5 の問題は 3 分の 1 くらいできたという感じですかね。

この問題ならば，平均点は 70 点くらいになって欲しかったね。レベル 2.5 まではできて欲しいよね。ということで，数年前に比べて受験生の数学の力はデクリーズかな。

数学勉強の第一歩は，教科書を徹底的に勉強することです。公式の成り立ち，定理の証明の方法，例題の解法など，納得するまで繰り返してなぞって下さい。数学が苦手な人は，教科書を声を出して読むことから始めて下さい。読みながらわからないことは何かを見つけ，それをわかるまで考えましょう（調べましょう）。

教科書のどこに何があったかが記憶にあれば，すぐ復習できます。教科書以外の余分な問題をやってみたい方は問題集を 1 冊買って，こつこつしかしほとんど全部やってみてください。必ず数学の力がつきます。勉強は 1 人でもできますよ。頑張れ！

（2 月 17 日 (金)‘ 23 完，おとといのジョー）